КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
(метрика, норма, скалярное произведение,
функционал, множество, теоремы Вейерштрасса)
ВАРИАНТ 1

1. Обоснуйте, является ли функционал $n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_{2n-1}| + \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n}^2}$ нормой а) в l^2, б) в l^1?

2. Исследовать функционал $J(x)$ на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую непрерывность, слабую полунепрерывность снизу в пространстве l^2, где

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2x_n + x_{n+1})^2.$$

3. Исследовать множество X на выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую замкнутость, компактность и слабую компактность в пространстве l^2, где

$$X = \left\{ x \in l^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n+1} \leq 1 \right\}.$$

4. Обоснуйте, применимы ли а) метрический, б) слабый варианты теоремы Вейерштрасса в задаче минимизации $J(x) \to \inf\limits_{x \in X}$, где функционал $J(x)$ и множество X взяты из пунктов 2 и 3.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
(метрика, норма, скалярное произведение,
функционал, множество, теоремы Вейерштрасса)
ВАРИАНТ 2

1. Обоснуйте, является ли функционал $n(f) = \max\limits_{t\in[-1,0]}|f(t)| + \int\limits_0^1 |f(t)|dt$ нормой а) в $C[-1,1]$, б) в $L^1[-1,1]$?

2. Исследовать функционал $J(u)$ на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую непрерывность, слабую полунепрерывность снизу в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$, где

$$J(u) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(t) \left(\int\limits_{-\pi}^{t} u(s)ds \right) dt.$$

3. Исследовать множество U на выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую замкнутость, компактность и слабую компактность в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$, где

$$U = \left\{ u \in L^2[-\pi,\pi] : |u(t)| \overset{\text{п.в.}}{\leq} 1 \right\}.$$

4. Обоснуйте, применимы ли а) метрический, б) слабый варианты теоремы Вейерштрасса в задаче минимизации $J(u) \to \inf\limits_{u\in U}$, где функционал $J(u)$ и множество U взяты из пунктов 2 и 3.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
(метрика, норма, скалярное произведение,
функционал, множество, теоремы Вейерштрасса)
ВАРИАНТ 3

1. В пространстве $\mathbf{m}$ всевозможных ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ норма определяется как $\|x\|_{\mathbf{m}} = \sup\limits_n |x_n|$. Обоснуйте, является ли а) $\|x\|_{\mathbf{m}}$ нормой в l^2, б) $\|x\|_{l^1}$ нормой в $\mathbf{m}$?

2. Исследовать функционал $J(x)$ на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую непрерывность, слабую полунепрерывность снизу в пространстве l^2, где

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - 2x_{n+1})^2.$$

3. Исследовать множество X на выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую замкнутость, компактность и слабую компактность в пространстве l^2, где

$$X = \left\{ x \in l^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n + \frac{1}{2^{n-1}} \right)^2 \leq 1 \right\}.$$

4. Обоснуйте, применимы ли а) метрический, б) слабый варианты теоремы Вейерштрасса в задаче минимизации $J(x) \to \inf\limits_{x \in X}$, где функционал $J(x)$ и множество X взяты из пунктов 2 и 3.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
(метрика, норма, скалярное произведение,
функционал, множество, теоремы Вейерштрасса)
ВАРИАНТ 4

1. Обоснуйте, является ли функционал $n(f) = \sqrt{\int\limits_{-1}^{0} f^2(t)dt} + \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ нормой а) в $C[-1,1]$, б) в $L^1[-1,1]$?

2. Исследовать функционал $J(u)$ на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую непрерывность, слабую полунепрерывность снизу в пространстве $L^2[0,1]$, где

$$J(u) = \int\limits_0^1 u(t) \left(\int\limits_t^1 u(s)ds \right) dt.$$

3. Исследовать множество U на выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую замкнутость, компактность и слабую компактность в пространстве $L^2[0,1]$, где

$$U = \left\{ u \in L^2[0,1] : \int\limits_0^1 u(t)\big(u(t) - 2\sin 2\pi t\big)dt \le \frac{1}{2} \right\}.$$

4. Обоснуйте, применимы ли а) метрический, б) слабый варианты теоремы Вейерштрасса в задаче минимизации $J(u) \to \inf\limits_{u\in U}$, где функционал $J(u)$ и множество U взяты из пунктов 2 и 3.